Concurso Ayudante de Segunda - Área Matemática

A los 14 días del mes de agosto de 2023 el jurado que entiende en el concurso para proveer 37 (treinta y siete) cargos de Ayudante de Segunda (Área Matemática) en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) formado por las doctoras Paula Escorcielo y María Florencia Statti y el doctor Mariano Merzbacher establece lo siguiente.

Puntaje

Antedecentes docentes	5
Antedecentes científicos	3
Antedecentes de extensión	5
Antedecentes profesionales	3
Prueba de oposición	56
Calificaciones, títulos, estudios y otros	28

Fecha, modalidad y temas de la prueba de oposición

La prueba de oposición será escrita el día miércoles 23 de agosto de 2023 a las 14 hs en el Aula Magna del Pabellón 2 y tendrá una duración de 90 minutos.
El/La concursante deberá desarrollar un ejercicio de cada una de las listas detalladas a continuación (dos ejercicios en total).
La Lista 1 consta de 10 ejercicios correspondientes a las materias *Algebra Lineal / Algebra Lineal Computacional*. La Lista 2 consta de 10 ejercicios correspondientes a la materia *Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)*.
Los ejercicios a desarrollar serán anunciados por el jurado al inicio de la prueba de oposición. Se espera que sean presentados de la manera en que serían explicados a un/a estudiante que esté cursando la materia correspondiente, detallando de forma escrita incluso aquello que se indicaría en forma verbal e indicando los resultados teóricos usados según el momento de la materia en que se estuvieran desarrollado los ejercicios.

Paula Escorcielo   María Florencia Statti   Mariano Merzbacher

Lista 1: Diagonalización

1. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \end{cases}$$

   (a) Hallar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

   Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$.

   (b) Diagonalizar A.

   (c) Dar una fórmula cerrada para F_n.

2. Considerar la sucesión dada por la recursión:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0$$

   Encontrar una fórmula general para el término a_n en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$;

   (b) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$.

3. Sean x_n, y_n las sucesiones definidas para $n \in \mathbb{N}_0$ por

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n. \end{cases}$$

   Hallar una fórmula general para x_n e y_n en términos de x_0 e y_0.

4. (a) Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$u'(t) = au(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

   con condición inicial $u(0) = c_0$ es $u(t) = c_0 e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} u'(x) = 6u(x) + 2v(x) \\ v'(x) = 2u(x) + 3v(x) \end{cases}$$

   con condiciones iniciales $u(0) = 3$, $v(0) = -1$.

   (b) Probar que $\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : u'' = u\} =< e^t, e^{-t} >$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

(a) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_B$ sea diagonal.

(b) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de A son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si A es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si A es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si A es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

7. Una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

8. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que f es un proyector y hallar una base B tal que $[f]_B$ sea diagonal.

9. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que estaban sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k-ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

(a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

(b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 100)$, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

(c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$, es decir, mueren todos.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $(A^n)_{ij} \to 0$ cuando $n \to +\infty$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Lista 2: Teorema de Cambio de Variables

1. Para cada una de las siguientes integrales, graficar la región cuya área está dada por la integral y calcularla.

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1}^{2} r\,dr\,d\theta$, (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2\sin(\theta)} r\,dr\,d\theta$.

2. Usar una integral doble para hallar el área de las siguientes regiones.

   (a) Un pétalo de la rosa $r = \cos(3\theta)$.

   (b) La región determinada por las condiciones $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

3. Calcular las siguiente integrales utilizando un cambio de variables apropiado.

   (a) $\displaystyle\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las rectas $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=3$,

   (b) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\,dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x|+|y| \leq 1$.

4. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

   (a) Dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$

   (b) Entre el paraboloide $z = x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.

5. Hallar el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, por encima del plano xy y por abajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Hallar el área del paralelogramo de vértices $A=(1,2,3)$, $B=(1,3,6)$, $C=(3,8,6)$ y $D=(3,7,3)$.

7. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vectores. Probar que $u\cdot(v\times w) = \det(A)$ donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz que tiene a u, v y w como filas.

8. Calcular el volúmen del sólido encerrado por $x^2+z^2=9$ y los planos $y=-1$ e $y+z=9$.

9. Sea

   $$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ \frac{1}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}.$$

   Calcular $\displaystyle\iiint_E \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

10. Calcular $\displaystyle\iiint_E dV$, donde E es el sólido encerrado por el elipsoide

    $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$