# CONCURSO DE AYUDANTE DE SEGUNDA - ÁREA MATEMÁTICA

## PRUEBA DE OPOSICIÓN

A los 7 días del mes de noviembre de 2022, el jurado que entiende en el concurso para proveer **37 (treinta y siete) cargos de Ayudante de Segunda**, Área: Matemática, en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) formado por los doctores Marcelo Paredes, María Eugenia Rodríguez y Joaquín Singer, fijó la modalidad y tema de la prueba de oposición.

La prueba de oposición será escrita el día **lunes 14 de noviembre a las 16 hs** y tendrá una duración de 90 minutos. La prueba consta de 2 (dos) ejercicios a desarrollar, elegidos por el jurado de entre una lista de 20 (veinte) y que se detalla a continuación. La lista tiene dos partes, el jurado seleccionará justo antes de comenzar la prueba un ejercicio de la parte I (sobre las asignaturas Análisis I y Análisis II) y otro ejercicio de la parte II (sobre la asignatura Álgebra I). El postulante deberá exponerlos y desarrollarlos por escrito, tal como si se lo estuviera explicando a un alumno que está cursando las asignaturas a las que hacen referencia respectivamente, indicando los resultados teóricos usados según el momento de la materia en que se estuvieran desarrollado los ejercicios.

El aula del desarrollo del concurso será comunicada próximamente.

Marcelo Paredes    María Eugenia Rodríguez    Joaquín Singer

**CONCURSO DE AYUDANTE DE SEGUNDA - ÁREA MATEMÁTICA**

## Ejercicios Parte I

### Análisis I

1. Sea $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)+x^2+y^2-1}{x^2+y^2}$.

2. **(a)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que tiene dos máximos locales. Probar que $f$ tiene un mínimo local.

   **(b)** Probar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tiene sólo dos puntos críticos y ambos son máximos locales.

3. Hallar los puntos sobre la superficie $y^2 = 9 + xz$ que están más cerca del origen.

4. Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y) = e^{-xy}$ en la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

5. Usando integrales dobles calcular el área de la región dentro de las circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

6. Hallar el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, por encima del plano $xy$ y por abajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

### Análisis II

7. Sea $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2})$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, simple y suave orientada positivamente que encierra la circunferencia unitaria centrada en el origen.

8. Calcular
$$\int_{\mathcal{C}} (y + \sin x)\ dx + (\frac{3}{2}z^2 + \cos y)\ dy + 2x^3 dz$$
donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin(2t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

9. Resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ y $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

10. Hallar los equilibrios y analizar la estabilidad de la ecuación $x'' + cx' - x^3 = 1$.

## Ejercicios Parte II

### Álgebra I

1. Sea $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\} : f \text{ inyectiva}\}$. Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $A$ definida por

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2).$$

   Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$. ¿Cuántos elementos hay en la clase de equivalencia de $f$?.

2. Hallar todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$.

3. **(a)** Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\displaystyle\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$.

   **(b)** Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\mathrm{Re}(\displaystyle\sum_{k=0}^{60} w^k)$.

4. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $G_{20}$:

$$z \,\mathcal{R}\, w \iff zw^9 \in G_2.$$

   Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

5. Hallar el menor número natural $n$ tal que $(n : 3150) = 45$ y $n$ tenga exactamente 12 divisores positivos.

6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.

   **(a)** Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

   **(b)** Para cada $k \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{k-1}b : a^k + b^k)$.

7. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

9. **(a)** Hallar un polinomio mónico $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que $X + 2|f$ y $(f : (X - \sqrt{2})^2) = X - \sqrt{2}$.

   **(b)** Determinar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónicos de grado 5 que satisfacen simultaneamente que $(f : f')$ tiene grado 2, $1 + 2i$ es raíz de $f$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

10. Sea $p$ un número primo positivo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son irreducibles y cuántos de ellos reducibles?.